環境化学科

基礎物理学演習

平成 **29** 年度

目 次

1 ベクトル **1**

2 運動学 **2**

3 万有引力・中心力場 **2**

4 剛体の運動 **3**

5 弾性体 **4**

6 振動と波動 **4**

7 コンピュータ利用 **5**

8 補助問題 **5**

演習の進め方

- 演習用のノート (なるべく綴じたもの，リーフノートは避けること) に予習しなさい．演習当日に予習の有無を調べて検印を押します．
- 授業ではまず最初に，配布された解答用紙に指定問題の解答を書いていきます．解答の出来不出来は予習にかかっていますから，しっかり予習してくること．
- 解答用紙を回収した後，解答を説明しながら板書していきます．
- 解らないことは恥ずかしいことではありません，どこが解らないのかはっきりさせて，納得できるまで考える癖をつけましょう．もちろん質問は大歓迎です．
- この演習プリントはPDF ファイルの形で公開しています．汚損した場合は下記 URL からダウンロードして、各自で印刷して下さい．
  http://www.forest.s.dendai.ac.jp/lect/

1 ベクトル

(1) 3 つのベクトル $3\vec{i}+7\vec{j}-4\vec{k},\ \vec{i}-5\vec{j}-8\vec{k},\ 6\vec{i}-2\vec{j}+12\vec{k}$ の和を求め，その大きさと方向余弦 (l,m,n) を求めなさい．

(2) 2 点 P,Q の位置ベクトルがそれぞれ $\vec{i}+3\vec{j}-7\vec{k},\ 5\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$ であるとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を求め，その大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ と方向余弦 (l,m,n) を求めなさい．

(3) 1 点 O に作用する 2 つの力を $\vec{F}_1,\vec{F}_2$ とする．それらの合力 $\vec{F}$ の大きさが $\vec{F}_1$ の大きさに等しく，その方向が $\vec{F}_1$ に垂直であるとき，他の力 $\vec{F}_2$ を求めなさい．

(4) 1 点 O に作用する 2 つの力を $n\overrightarrow{\mathrm{OA}}, m\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，それらの合力は，$(m+n)\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ で表されることを証明しなさい．ただし，R は AB を AR : RB = $m:n$ に内分する点である．

(5) 1 点に作用する 3 つの力が釣り合っているとき，それらの力は同一平面上にあって，各々の力の大きさは，他の 2 力の挟む角の正弦に比例することを示しなさい．(これを **Lami の定理** という)

(6) 物体に $\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}$の力が作用して，それが $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$ だけ動いたとき，力のなした仕事 $\vec{F}\cdot\vec{r}$ を求め なさい．

(7) 2 つのベクトル $\vec{A}=2\vec{i}+A_y\vec{j}+\vec{k},\vec{B}=4\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$ が直交するとき，A_y はいくらになるか．

(8) 次の 2 つのベクトルの成す角を求めなさい．

(i) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j},\ \vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

(ii) $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},\ \vec{c}=\vec{i}$

(9) 任意のベクトル $\vec{A}$ が，$\vec{A}=(\vec{A}\cdot\vec{i})\vec{i}+(\vec{A}\cdot\vec{j})\vec{j}+(\vec{A}\cdot\vec{k})\vec{k}$ のように表されることを示しなさい．

(10) 回転運動の勢いを表す物理量の角運動量 $\vec{L}$ は，質点の位置ベクトル $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ と運動量ベクトル $\vec{p}=p_x\vec{i}+p_y\vec{j}+P_z\vec{k}$ との **ベクトル積**

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$$

で定義される．角運動量の x,y,z 成分を求めなさい．

(11) 2 つのベクトル $\vec{A},\vec{B}$ に垂直な単位ベクトル $\vec{E}$ をベクトル積で表しなさい．

(12) 2 つのベクトル $\vec{A},\vec{B}$ に対して $|\vec{A}\times\vec{B}|^2+|\vec{A}\cdot\vec{B}|^2=|\vec{A}|^2|\vec{B}|^2$ が成り立つことを証明しなさい．

(13) k を任意の実定数として，$\vec{A}=\vec{B}+k\vec{C}$ の関係があるとき，$\vec{C}\times\vec{A}=\vec{C}\times\vec{B}$ が成り立つことを示しなさい．

2 運動学

(14) 加速度 $a(t) = \dfrac{1}{5}\exp\left(-\dfrac{t}{20}\right)$ [m/s^2] で直線運動する質点の速度は，充分長い時間が経った後にいくらになるか．また，その半分の速度を持つまでには，どの位の時間がかかるか．ただし，初速度は 0 とし，$\ln 2 = 0.693$ とする．

(15) 初速度 v_0 で大気中を落下する質点がある．これには，速度に比例する大気の抵抗 (単位質量に対するその比例係数を $k > 0$ とする) が働いているものとし，大気の浮力は無視できるものとする．重力加速度を g として以下の各問に答えなさい．

(i) t 秒後の速度 $v(t)$ を求めなさい．

(ii) t 秒後の加速度 $a(t) = \dfrac{dv(t)}{dt}$ を求めなさい．

(iii) t 秒後の落下距離 $y(t)$ を求めなさい．

(iv) 速度が v になるまでの落下距離 $y(v)$ を求めなさい．

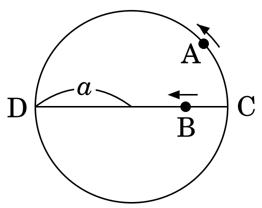
(v) $t \to \infty$ における速度 (終端速度) $v(\infty)$ を求めなさい．

(16) 平面運動を極座標 (r, θ) で表す場合，その動径方向 (r 方向) とそれに垂直な方向 (θ 方向) の速度 (v_r, v_θ) および，加速度 (a_r, a_θ) を r, θ を用いて表しなさい．

(17) 質点が半円周上を運動するとき，この点の直径上への正射影が等速運動するという．円の中心を極とする極座標について，加速度成分 (a_r, a_θ) を求めなさい．

(18) 半径 12 cm の円周に沿って動く質点がある．あるときにその速さが，6 cm/s で，毎秒 3 cm/s の割合で速さが増しているときの質点の加速度を求めなさい．

(19) 質点 A が半径 a の円周上の 1 点 C から初速度 v_0 で円周上を動き始めて，一定の割合で速さを増し，C 点を通る直径の他端 D に達する間に，他の質点 B が C 点 から A と同時に直径 CD の上を初速度 v_0 で動き始め，A と同じ割合で速度を減らし，A と同時に D 点 に達した．これに要した時間，B の加速度，および，D 点 で A のもつ法線加速度を求めなさい．



3 万有引力・中心力場

(20) 質量 m，長さ l の一様な棒が，その延長線上で棒の端から距離 a にある質量 M の質点に及ぼす万有引力を計算しなさい．万有引力定数を G とする．

(21) 内径 b，外径 a の一様な球殻の中心から z の距離にある質量 m の質点に作用する万有引力を求めなさい．球殻の質量は M であるとし，万有引力定数を G とする．

(22) 地球を半径 R の密度が一様な球とする．その直径を貫く穴をつくり，その中に質点を入れると，質点は地球の引力の下でいかなる運動を行うか．

(23) 質量 M の等しい 2 つの質点が，$2a$ の距離隔てて置かれている．この 2 つの質点を結ぶ直線上に質量 m の質点があり，両方の質点から万有引力を受けている．第 3 の質点が釣り合いの位置から初速度 v_0 をもって直線上を動き始めたとすると，任意の点 $-a < x < a$ における質点の速度 $v(x)$ はいくらか．

(24) 太陽 (質量 M) と惑星 (質量 m) が距離 a だけ離れて万有引力で引き合い，それら 2 つの質点は系の重心回りに円運動していると考えるとき，Kepler の第 3 法則は，その円運動の周期を T として，

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2}(M + m) \qquad G : \text{万有引力定数}$$

で与えられることを示しなさい．

(25) 大きさが相互距離 r のみの関数 $f(r)$ である中心力は，ポテンシャル

$$U = -\int_{r_0}^{r} f(r)\,dr$$

をもつことを示しなさい．

(26) 中心力を受けながら運動する質点の直角座標による運動方程式をもとにして，面積速度が一定であることを証明しなさい．

(27) 距離の 2 乗に反比例する中心力

$$F = -\frac{m\mu}{r^2}$$

による運動を直角座標で表した場合の運動方程式は，

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{h}\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{r}\right) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu}{h}\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{r}\right)$$

のように書けることを示し，軌道 r は，

$$r = \frac{h^2}{\mu} + Ax + By$$

で与えられることを証明しなさい．ただし，h は面積速度の 2 倍である．

(28) 質量 m の質点が大きさ $mf(r)$ の中心力を受けて運動するとき，その軌道は，

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{h^2u^2}$$

で定まることを示しなさい．ただし，力の中心を極とする平面座標を (r, ϕ) として，$u = 1/r$ であり，h は面積速度の 2 倍を表すものとする．

(29) 万有引力 $mf(r) = -m\dfrac{\mu}{r^2}$ を受けて運動する質点の軌道は，力の中心を焦点とする円錐曲線であることを示しなさい．

(30) (省略)

4 剛体の運動

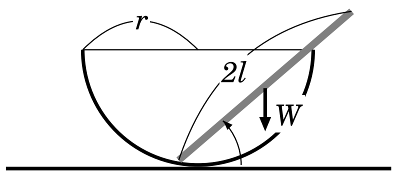
(31) 半径 a，質量 M の薄い円板の中心を通り，互いに直交する 3 軸に関する慣性モーメント I_x, I_y, I_z を求めなさい．

(32) 半径 a，質量 M の球の中心を通る軸に関する慣性モーメントを求めなさい．

(33) 半径 a，長さ l，質量 M の円柱の中心を通り，円柱軸に垂直な軸に関する慣性モーメントを求めなさい．

(34) 半径 r_1, r_2，質量 m_1, m_2 の 2 つの球が滑らかな釘 P にかけられた長さ l の糸で連結されて触れ合っている．2 球の釣り合いの位置 (鉛直軸と糸のなす角，および P からひとつの球の重心までの距離) とそのときの糸に働く張力を求めなさい．重力加速度を g とする．

(35) 半径 r の滑らかな内壁をもつ半球殻が淵を上方に向けて水平にして固定されている．これに長さ $2l$，重さ W の真直で一様な棒が図のように寄りかかっている．棒の釣り合いの位置 (水平面と棒のなす角) および，棒が内壁から受ける抗力を求めなさい．



(36) 剛体に働く力を組かえるとき，力のベクトルの和が組かえ前後で不変で，いずれか 1 点に関する力のモーメントの和が不変であれば，あらゆる点に関する力のモーメントの和が組かえ前後で不変になっていることを示しなさい．

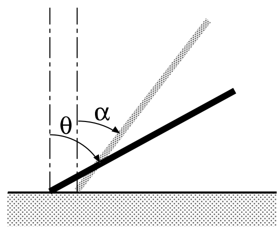
(37) 一様な重力 (重力加速度 g) が作用するとき，質量 M の剛体に働く重力の合力の着力点が剛体の質量中心 (重心) になっていることを示しなさい．

(38) 半径 r，質量 M の一様な円板の周りに軽い糸を巻き，糸の一端を天井に吊して，円板を静かに離して鉛直方向に運動させた．円板の中心の加速度と糸の張力を求めなさい．ただし，重力加速度を g とする．

(39) 一様な半径 r，質量 M の円柱の中心軸を水平に支え，表面に軽い糸の一端を固定し，他端に質量 m のおもりを結ぶ．円柱にある角速度を与えて糸を巻き上げさせる場合，おもりが上がり始める速度を v_0 とするとき，おもりが静止するまでに上昇した高さはいくらになるか．但し，重力加速度を g とする．

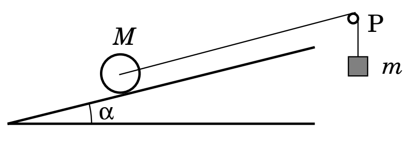
(40) 長さ 2ℓ の一様な棒の一端 A を水平かつ滑らかな床の上におき，棒を鉛直と α の角だけ傾けて静かにはなした．次の各問いに答えなさい．ただし，重力加速度を g とする．

(i) 棒の傾きが θ のときの角速度
(ii) 棒の傾きが θ のとき，床からの抗力
(iii) 棒の他端が床につくときの角速度
(iv) 棒の他端が床につくときの速度



(41) 斜面を転がり落ちる円板がある．その中心が最初の位置より h の高さだけ下がったときの円板の速度を求めなさい．但し，初速は 0 であり，重力加速度を g とする．

(42) 図のように，水平で滑らかな棒 P に糸をかけ，糸の一端には，質量 m の質点を結び，他端は質量 M の円柱の軸に結ぶ．この円柱を傾斜角 α の斜面を転がしながら引きあげる場合の加速度を求なさい．ただし，重力加速度を g とし，円柱の軸は常に水平であり，糸は斜面に平行である．



(43) 半径 a の一様で薄い円板が動摩擦係数 μ の水平台上にあり，板の中心を通る鉛直軸の周りに角速度 ω_0 で回転

し始めた場合，回転が止まるまでの時間を求めなさい．ただし，重力加速度を g とする．

(44) 水平軸をもつ質量 M の剛体の振り子に軸から距離 ℓ のところへ水平方向に軸と垂直な撃力 $\overline{F}$ を加えたとき，軸からの撃力による抗力を求めなさい．ただし，剛体の重心と軸との垂直距離は h とし，軸の回りの慣性モーメントを I_z とする．また，軸は細く滑らかで，軸に関する抗力のモーメントは無視する．

(45) 半径 r の円柱がその軸を水平にして，固定された半径 R の円筒の内面を転がる運動は，単振動になり，その周期は，長さ $(1+k^2/r^2)(R-r)$ の単振り子の周期と同じであることを示しなさい．ただし，k は円柱の軸に関する回転半径である．

5 弾性体

(46) 半径 a の円形断面をもつまつすぐな棒を力 F で引っ張るとき，棒の軸に垂直な断面における応力を求なさい．また，棒の中にいかなる方向の面を考えたとき，その面についての接線応力が最大となるか．ただし，伸びによる断面積の減少は無視できる．

(47) 弾性体をある方向にのみ張力を加えて引き伸ばすとき，その体積が不変ならば，Poisson 比は，0.5 であることを示しなさい．

(48) 密度 ρ，Young 率 E，長さ L の一様な棒の一端を天井に固定して，鉛直に釣り下げるとき，棒の伸びはいくらになるか．ただし，伸びによる断面積 S の減少は無視できるものとし，重力加速度を g とする．

(49) 密度 ρ，Young 率 E，長さ L の一様な棒の一端を固定し，一定の角速度 ω で棒を水平面内において回転させるとき，棒の伸びはいくらになるか．ただし，伸びによる断面積 S の減少は無視できるものとし，重力加速度を g とする．

6 振動と波動

(50) 微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

の解が，

$$x(t) = A + B(\omega_0 t) + C(\omega_0 t)^2 + D(\omega_0 t)^3 + E(\omega_0 t)^4 + F(\omega_0 t)^5 + \cdots$$

のように $\omega_0 t$ のべき級数に展開できたとして，元の方程式に代入することによって，係数 $A, B, C, D, E, F, \cdots$ を決定し，方程式を解きなさい．

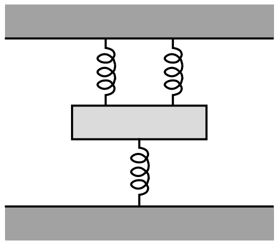
(51) ひとつの単振動は，向きが反対の相等しい 2 つの等速円運動に分解できることを示しなさい．

(52) 次のような互いに垂直な 2 つの振動を合成した軌道の式を求め，横軸に x 軸，縦軸を y 軸にとった座標面内にその略図を画きなさい．

(i) $x = \cos(2\pi t),\ y = \cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$

(ii) $x = A\cos(\pi t),\ y = B\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$ (A, B は定数)

(53) 3 本のばね A, B, C によって，質量 m の物体が図のように支えられている．3 本のばねは，ばね定数も自然長 l_0 も共に同じで，図のつりあいの位置においても同じ長さ l になっているとき，上下振動の周期を求なさい．ただし，重力加速度を g とする．



(54) 単振動をする物体の一周期の平均運動エネルギーと平均位置エネルギーとは，相等しく，その値は任意の時刻における全エネルギーの 1/2 に等しいことを示しなさい．

(55) 一端が固定された長さ ℓ の糸の他端に質点を吊るし，糸が固定点を通る鉛直線と常に一定角 α をなすように質点を一定の速さで水平な円周を描いて運動させる (これを，円錐振り子という)．この運動の周期を求なさい．また，この糸が M [g] の物体を釣り下げるだけの強さをもつとすると，質点の回転し得る最大の回転数は毎秒何回か．

(56) 単振り子の運動方程式を Newton の運動方程式から直接求め，それを積分することによって，エネルギー保存の関係式を導きなさい．

(57) 単振り子 (長さ l，おもりの質量 m) をつるす点が軽いばね (ばね定数 k) によって，水平左右方向に振動するようになっている．その振動周期 T が重力加速度を g として，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left(1+\frac{mg}{kl}\right)}$$

で与えられることを示せ．

(58) 2 定点間に長さ l の糸を張力 T で張り，その一端から a の位置に質量 m の質点を取り付ける．糸に垂直方向に，この質点を微小振動させたときの振動数を求なさい．ま

た，端からどの位置に質点を付けたら振動数は最小となるか．ただし，重力は無視する．

(59) 長さ l の軽い弾性糸に質量 m の質点を $N(\gg 1)$ 個，等間隔 a でむすびつけて，その両端を張力 T で引っ張っておき，これを垂直方向に微小横振動させるとき，i 番目の質点の運動方程式が,

$$m\ddot{y}_i = \frac{T}{a}\{(y_{i+1} - y_i) - (y_i - y_{i-1})\}$$

で表されることを示せ．ただし，$l = (N+1)a$ である．

次に，質点の数を無限に増やし，$Nm = M = \rho l$ で与えられる線密度 ρ の糸にもっていった極限を考え，$a = \Delta x$, $y_{i+1} - y_i = \Delta y_i$, $y_i - y_{i-1} = \Delta y_{i-1}$ とおくことによって，弦の運動方程式

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

を導きなさい．

(60) 媒質の変位 y が時間 t および位置 x の関数として，$y = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$ の形をとるとき，これが v の速さで x の正の方向に進行する波動であることを示しなさい．

(61) 時間 t および位置 x の関数として，$y = a\sin(bt + cx)$ で表される波動の波長 λ，周期 T および，それが伝わる速度 v を求なさい．

(62) 振幅 a，波長 λ，周期 T の正弦波が x 軸正方向に進行している．これを，式で表し，この波動が,

(i) 自由端で反射して，重なりあう場合,

(ii) 固定端で反射して，重なりあう場合,

それぞれいかなる波動を生ずるかを調べよ．ただし，いずれの場合も反射は，完全に起こるものとする．

7 コンピュータ利用

(63) 次の関数曲線を図示しなさい．

(i) 懸垂線：$\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

(ii) トロコイド曲線：$x = a\theta - b\sin\theta$, $y = a - b\cos\theta$

(iii) 減衰振動曲線：$y = Ae^{-\lambda t}\sin(\omega t + \theta)$

(iv) 単スリットからのフラウンホーファー回折強度：$I = I_0\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)^2$

(v) リサージュ図形：$x = \cos(2\omega t + \beta)$, $y = \sin 3\omega t$, $\beta = 0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}$

(vi) 強制振動における定常振幅 $A(\omega)$：$A(\omega) = \dfrac{a_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}}$

ここに，a_0: 外力による最大加速度，ω_0: 系の固有振動数，λ: 減衰率 $(\omega_0^2 - \lambda^2 > 0)$ とする．

(vii) 離心率 $0 < \varepsilon$ の 2 次曲線：$r = \dfrac{l}{1 + \varepsilon\cos\theta}$

8 補助問題

微積分

(A) 次の式を x で微分しなさい．ただし，a や N は定数である．

(i) $(1 - 2x)^2$　(ii) $\sin(ax)$

(iii) Ne^{-ax}　(iv) $x\log(1 + x^2)$

(B) 次の式を x で不定積分しなさい．ただし，a は定数である．また，積分定数は C とする．

(i) $a\cos(ax)$　(ii) e^{-ax}

(iii) $\log x$　(iv) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

(C) 極座標系 (r, θ, ϕ) において微小体積 dV を表す次の関係式を用いて以下の各積分を求めなさい．

$$dV = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$$

(i) 半径 R の球の体積.

(ii) 密度 $\rho(r)$，半径 R の球の質量.

(iii) 一様密度 $\rho(r) \equiv \rho$，半径 R の球の質量.

(iv) 一様密度 ρ，半径 R の球と，その中心から距離 ℓ 離れた位置にある質点 m との間に作用する万有引力の大きさ．なお，万有引力定数を G とする．

力とベクトル

(D) 点 O を挟んで，$\vec{a}$, $\vec{b}$ を 2 辺とする三角形について，次の問いに答えなさい．

(i) $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角度を θ とすると，点 O の対辺の長さ c は $c^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos\theta$ と表されることを証明しなさい．

(ii) 三角形の面積は三辺の長さ a, b, c を用いて，$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ と表されることを証明しなさい．ただし $s = (a + b + c)/2$ である．

(iii) 点 O の対辺の中点の位置を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表しなさい．また，重心 G の位置を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表しなさい．

(E) 直角直交座標系のベクトル $\vec{r}$ について，次の関係を示しなさい．

$$\frac{d}{dt}\dot{\boldsymbol{r}}^2 = 2\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}} \qquad \left(\dot{\boldsymbol{r}} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt},\ \ddot{\boldsymbol{r}} \equiv \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)$$

(F) 日常生活の次のような場面で働く力のベクトルを図示しなさい．ただし，重力加速度を g とする．

- (i) 机の上に消しゴムが置いてある．
- (ii) 滑らかな斜面を小物体が滑べっている．
- (iii) 滑らかな半円筒側面を小物体が滑べり落ちている．
- (iv) ビー玉を屋上から落した．紙を屋上から落した．
- (v) 天井から糸でおもりが吊下げられている．
- (vi) 天井から糸で吊下げられたおもりが，微小振動している．
- (vii) ローラーを引いてグラウンドを整備している．
- (viii) 滑らかな壁に細い棒が立てかけられていて，棒の下端は粗い床に接している．

(G) 質点の平面運動を極座標であらわす．動径方向の単位ベクトルを $\vec{e}_r$ とし，それと直交する（接線方向の）単位ベクトルを $\vec{e}_\theta$ とすると，質点の位置ベクトルは $\vec{r} = r\vec{e}_r$ と表わされる (r はベクトル $\vec{r}$ の大きさ)．この時，空間に固定の直交座標系との間に

$$\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}, \quad \vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$$

なる関係があることを使って以下の問いに答えなさい．

- (i) $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ の時間微分を求めなさい．
- (ii) $\vec{r}$ を時間で微分して速度の $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ 成分，すなわち v_r, v_θ を求めなさい．
- (iii) さらに時間微分を施し，加速度の成分 a_r，a_θ を求めなさい．

運動学

(H) 次のような関数形で与えられた質点の運動の加速度と変位を求めて図に表しなさい．

- (i) 直線上の運動：$v = t^2 - 2t,\ x(0) = x_0$
- (ii) 直線上の運動：$v = v_0(1 - e^{-\lambda t}),\ x(0) = x_0$
- (iii) 平面運動：$r = \gamma\theta = \beta t$

(I) 木の実に狙いを定めて，木の実が落ち始めると同時にパチンコを打った．落下途中の木の実にパチンコの玉が必ず当たることを示しなさい．

(J) 高さ h の屋上の端から初速度 v_0 でボールを投げ，できるだけ遠くの地上へ届かせたい．投げ上げる角度 θ および到達距離 x を求めなさい．ただし，空気の抵抗はないものとする．

剛体の運動

(K) 次の物体の質量中心を求めなさい．

- (i) $y = ax^2$ と $y = b$ で囲まれた一様な平面板．
- (ii) 高さ h，底面の半径 r の一様な直円錐．
- (iii) 中心角 α，半径 r の一様な扇．
- (iv) 半径 r の半円球．

(L) 水平面に立てた次の物体を傾けて静かに離す．離した後倒れない場合に傾けられる最大の角度はいくらか．

- (i) 半径 r，高さ h の一様な円筒．
- (ii) 高さ h，底面の半径 r の一様な直円錐．
- (iii) 半径 r の半円球．

(M) 半径 R，質量 M の滑車に，質量 m_1, m_2 のおもりを軽い紐の両端に付けてつるす．紐は滑べらないものとして，次の各物理量を求めなさい．

- (i) おもり（一方は上昇し他方は下降する）の加速度
- (ii) 滑車の角加速度
- (iii) 紐の張力

振動

(N) 原点を中心に x 軸上を振幅 A で単振動する質量 m の質点の位置 x と運動量 $p\ (= m\dot{x})$ はどちらも時間とともに周期的に変化する．(i) 質点の位置 x および運動量 p を時間 t を横軸として図示しなさい．(ii) x を横軸，p を縦軸にとって，x と p の関係を図示しなさい．(iii) また，この質点の運動エネルギー K を，同様に図示しなさい．

(O) バネの一端を固定し，下端に重りをつるすとき，その単位質量の増加につきバネの伸びは ℓ の割合で増加するという．いま，これに質量 m の重りをつけ，釣り合いの位置から少し下方に引き下げてから放すと，重りは単振動をすることを示しなさい．また，その周期を求めなさい．